**b)** Déduire que les points $A$, $B$ et $C$ déterminent un plan $P$ dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

**2)** On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ et soit $\Delta$ la droite passant par $I$ et perpendiculaire à P.

**a)** Montrer que la droite $\Delta$ coupe le plan P en $J$.

**b)** Calculer la distance $IJ$.

**3)** Soit $S$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

**a)** Montrer que $S$ est une sphère de centre $I$ et de rayon $R$ que l'on déterminera.

**b)** Montrer que le plan $P$ coupe la sphère $S$ suivant le cercle de centre $J$ et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**4)** Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

**a)** Vérifier que $N$ est un point de la sphère $S$.

**b)** Justifier que le point $N$ n'appartient pas au plan P.

**c)** Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

**d)** En déduire la valeur de $\theta$ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal.

## EXERCICE N°4 : 4 points

**1)** Montrer que pour x > 0 , on a : $\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$.

**2)** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.

**a)** Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n - 1 + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) \le u_n$.

**b)** Déduire un encadrement de $u_n$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=0$.

**3)** Montrer que pour $t\ge 0$, on a : $1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$. Déduire que pour $x\ge 0$, $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

**4)** On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{n^n}{n!}$.

**a)** Montrer que $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

**b)** Justifier que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\frac{1}{k}$.

**c)** Déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $n-\frac{1}{2}u_n\le\ln(v_{n+1})\le n$. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(v_n)}{n}=1$.

**5)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)=\frac{\ln(v_n)}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

## EXERCICE N°5 : 5 points

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^x\sqrt{e^x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1)** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn